

## ПОВЕРХНОСТНЫЕ ПОЛЯРИТОНЫ НА ГРАНИЦАХ АНИЗОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛОВ И ИЗОТРОПНЫХ СРЕД С ОДНОВРЕМЕННО ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ И МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЯМИ

© 2006 г. В. М. Гальинский, канд. физ.-мат. наук; А. Н. Фурс, канд. физ.-мат. наук

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

E-mail: Galynsky@bsu.by, FursAN@bsu.by

Исследованы поверхностные поляритоны на границах раздела изотропных сред с отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями и анизотропных кристаллов. Для таких границ предсказано существование изонормальных поверхностных мод, распространяющихся в одном и том же направлении с разными фазовыми скоростями.

Коды OCIS: 160.1190, 280.2470.

Поступила в редакцию 02.02.2006.

### Введение

Поверхностные поляритоны, представляющие собой электромагнитные возбуждения, локализованные вблизи границ раздела сред, можно разделить на два класса. К первому классу относятся хорошо исследованные поверхностные волны на границе изотропных сред с разными знаками диэлектрических (или магнитных) проницаемостей и сильной частотной дисперсией [1]. Сравнительно недавно был теоретически предсказан другой класс поверхностных поляритонов [2–4], возникающих вследствие анизотропии пограничных материалов, названных *сингулярными* поверхностными волнами. В отличие от поверхностных поляритонов первого типа сингулярные поверхностные поляритоны могут распространяться вдоль границ раздела сред с положительно определенными тензорами диэлектрических проницаемостей. Возбуждение таких поверхностных волн возможно лишь вдоль некоторых направлений, совокупность которых образует секторы в плоскости раздела сред. В работах [2, 4] были впервые теоретически предсказаны сингулярные поляритоны на границах немагнитных одноосных кристаллов и изотропных сред. Сингулярные поверхностные поляритоны также исследовались на границах немагнитных одноосных кристаллов с разной ориентацией оптических осей [5–8], фарадеевских и изотропных сред [9], на границах планарных бианизотропных и изотропных сред [10], немагнитных двuosных кристаллов и изотропных сред [11, 12].<sup>1</sup>

В 2000 году были экспериментально созданы среды (метаматериалы) с одновременно отрицательными значениями магнитной и диэлектрической про-

ницаемостей в микроволновом диапазоне [13, 14]. Впервые свойства таких сред были теоретически исследованы в работе [15].

Позднее в работах [16, 17] рассматривалась возможность существования поверхностных электромагнитных волн на границах метаматериалов с  $\epsilon < 0$ ,  $\mu < 0$  и изотропных сред. Оказалось, что в зависимости от значений материальных параметров сред на таких границах возможно возбуждение только одной поверхностной моды с *s*- или *p*-поляризацией [16, 17]. В работе [17] также исследовались направления потоков энергии поверхностных поляритонов. Было показано, что на плоских поверхностях сред с отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями могут существовать *прямые* и *обратные* поверхностные волны, для которых направления волнового вектора и потока энергии параллельны и антипараллельны соответственно. Этот факт согласуется с теоретическими работами [15, 18], где была показана противонаправленность волнового вектора и вектора Пойнтинга. Вещества с  $\epsilon < 0$  и  $\mu < 0$  часто называют “левыми” средами, так как напряженности электрического и магнитного полей и волновой вектор в них образуют левую тройку векторов, в то время как в средах с положительными проницаемостями (“правых” средах) – правую тройку<sup>2</sup>. На сегодняшний день левые материалы созданы только для микроволнового диапазона электромагнитных волн (в [18] сообщается о таких средах, работающих на частотах до 300 ГГц). Вполне возможно, что такие материалы будут созданы и для других диапазонов частот спектра электромагнитных волн.

В литературе, как правило, исследуются свойства поверхностных поляритонов в веществах, у которых отрицательна только одна из проницаемостей, либо

териальных тензоров  $\epsilon$  или  $\mu$  (см., например, [1, 3] и цитируемую там литературу), или свойства сингулярных поверхностных поляритонов на границах раздела анизотропных сред. Целью настоящей работы является исследование поверхностных поляритонов на границах раздела левых метаматериалов и анизотропных диэлектрических сред. Для таких поляритонов характерны свойства как сингулярных поверхностных поляритонов (возможность распространения только в определенных направлениях вдоль границы раздела), так и поверхностных волн на границах изотропных левых и правых сред (противонаправленность волнового вектора и вектора Умова–Пойнтинга). Показывается, что в отличие от границы двух правых сред (или границы изотропных правых и левых сред) в рассматриваемом случае могут существовать несколько поверхностных волн, распространяющихся в одном направлении с разными фазовыми скоростями. Такие волны мы называем изонормальными поверхностными волнами по аналогии с изонормальными объемными волнами в неограниченных анизотропных кристаллах [19].

В первом разделе статьи проводится общий анализ существования решений дисперсионного уравнения для поверхностных поляритонов на границах раздела левых изотропных сред и правых одноосных кристаллов. На основе этого анализа во втором разделе указаны соотношения для материальных параметров граничащих сред, при которых дисперсионное уравнение имеет одно, два или три решения. В третьем разделе изучено влияние слабой анизотропии на характеристики поверхностных электромагнитных волн на границах левых и правых сред.

### 1. Дисперсионное уравнение для поверхностных поляритонов

Рассмотрим границу раздела правого одноосного кристалла и левой изотропной среды. Вектор

единичной нормали к плоскости раздела сред обозначим  $\mathbf{q}$ . Одноосный кристалл описывается тензором обратной диэлектрической проницаемости  $\epsilon^{-1} = a + (b - a)\mathbf{c} \otimes \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{c}$  – единичный вектор оптической оси кристалла, а символом  $\otimes$  обозначено тензорное произведение векторов (диада). Левая изотропная среда характеризуется отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon' = a'^{-1}$  и  $\mu'$  ( $\mu' < 0$ ). Пусть оптическая ось кристалла лежит в плоскости границы.

Поверхностная электромагнитная волна в одноосном кристалле представляет собой суперпозицию неоднородных парциальных волн и описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{s=1}^2 C_s \mathbf{H}_s^0 \exp[ik(\mathbf{b} + \eta_s \mathbf{q})\mathbf{r} - i\omega t], \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{s=1}^2 C_s \mathbf{E}_s^0 \exp[ik(\mathbf{b} + \eta_s \mathbf{q})\mathbf{r} - i\omega t], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k$  – проекция волнового вектора на направление распространения волны  $\mathbf{b}$  вдоль границы раздела,  $\mathbf{H}_s^0$  и  $\mathbf{E}_s^0$  – амплитуды неоднородных парциальных волн на границе раздела;  $\eta_s$  – комплексные коэффициенты, характеризующие ослабление этих волн при удалении от границы раздела ( $\text{Im}\eta_s < 0$ );  $C_s$  – весовые коэффициенты. Поля во второй среде описываются аналогичными уравнениями, в которые будут входить штрихованные амплитуды  $\mathbf{H}_s^{\prime 0}$ ,  $\mathbf{E}_s^{\prime 0}$  и коэффициенты  $C_s'$ ,  $\eta_s'$ , при этом  $\text{Im}\eta_s' > 0$ .

В рассматриваемом случае дисперсионное уравнение для поверхностных возбуждений может быть получено с помощью общих соотношений для поверхностных волн в линейных бианизотропных средах произвольной симметрии, установленных в работе [10]:

$$F(v, \alpha) = 0, \quad (2)$$

где функция  $F(v, \alpha)$  имеет вид

$$\begin{aligned} F(v, \alpha) &= \sqrt{ab} \sqrt{\frac{a-v^2}{d-v^2}} + a'\mu' + \frac{1}{\sqrt{a(d-v^2)} + \sqrt{b(a-v^2)}} \left\{ \left( d \sqrt{\frac{a-v^2}{d-v^2}} + \sqrt{ab} \right) \sqrt{\frac{a'-\mu'v^2}{a'}} a' + \right. \\ &\quad \left. + \left[ (a-v^2) \sqrt{ab} + (ab - v^2(a+b-d)) \sqrt{\frac{a-v^2}{d-v^2}} \right] \mu' \sqrt{\frac{a'}{a'-\mu'v^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) используется обозначение  $d = a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между направлением распространения поверхностной волны и оптической осью кристалла. Безразмерная приведенная частота  $v = \omega / ck$  представляет собой фазовую скорость поверхност-

ной волны в единицах скорости света  $c$  в вакууме. Из симметрии задачи следует, что если волна может распространяться в некотором направлении  $\mathbf{b}$ , то она будет распространяться и в противоположном направлении  $-\mathbf{b}$ , поскольку функция  $F(v, \alpha)$  не за-

меняется при замене  $\alpha \rightarrow \pi + \alpha$ . Кроме того,  $F(v, \alpha)$  инвариантна при замене  $\alpha \rightarrow -\alpha$ . Таким образом, множество направлений  $\mathbf{b}$ , вдоль которых возможно распространение поверхностных волн, зеркально симметрично при отражениях в плоскости раздела относительно оси кристалла и при отражениях относительно прямой, перпендикулярной к оси. Поэтому достаточно рассматривать только направления  $\mathbf{b}$ , определяемые углами  $\alpha \in [0, \pi/2]$ .

При заданных материальных параметрах сред  $a, b, a', \mu'$  и угле  $\alpha$  из уравнения (2) можно определить приведенную частоту  $v = v_s$  и, следовательно, проекцию  $k$  волнового вектора поверхностной волны на направление  $\mathbf{b}$ . При этом предполагается, что

$$0 \leq v_s < v_L = \min(\tilde{v}_L, v'_L), \quad (4)$$

где  $\tilde{v}_L = \min(\sqrt{d}, \sqrt{a})$  и  $v'_L = \sqrt{a'/\mu'}$  – так называемые *предельные частоты* поверхностных волн [10] в одноосном кристалле и изотропной среде соответственно. Условие (4) равносильно тому, что коэффициенты  $\eta_s$  и  $\eta'_s$  в уравнениях (1) комплексны, т. е. энергия поля электромагнитной волны локализована вблизи границы раздела в обеих пограничных средах, и волна является поверхностной. Если оно не выполняется, то хотя бы один из коэффициентов  $\eta_s, \eta'_s$  ( $s = 1, 2$ ) действительный, т. е. хотя бы одна из парциальных волн является объемной. Такие случаи мы исключаем из рассмотрения.

Отметим, что уравнения (2), (3) верны при любых знаках проницаемостей  $\epsilon'$  и  $\mu'$  или, иными словами, независимо от того, является ли пограничная изотропная среда правой или левой. В работе [20] для границы раздела анизотропных сред с положительно определенными тензорами проницаемостей была доказана единственность решения дисперсионного уравнения для поверхностных поляритонов (если для заданного направления распространения волны  $\mathbf{b}$  решение существует, то оно единственно). При этом использовался факт положительности плотности энергии магнитного поля

$$W_m = \frac{1}{16\pi} \mathbf{H}\mu\mathbf{H}. \quad (5)$$

В то же время для левых сред плотность энергии электромагнитного поля рассчитывается по следующей формуле [18]:

$$W = \frac{\partial(\omega\epsilon(\omega))}{\partial\omega} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\partial(\omega\mu(\omega))}{\partial\omega} |\mathbf{H}|^2, \quad (6)$$

а формула (5) неверна и приводит к не имеющим физического смысла отрицательным значениям плот-

сред. Поэтому ниже при анализе дисперсионного уравнения (2) учитывается также возможность наличия нескольких его решений при заданном направлении распространения волны  $\mathbf{b}$ . Эти решения описывают поверхностные волны, распространяющиеся в одном направлении с разными фазовыми скоростями. Такие волны мы называем *изонормальными поверхностными волнами* по аналогии с изонормальными объемными волнами в неограниченных анизотропных кристаллах [19].

Функция  $F(v, \alpha)$  (3) сложным образом зависит от  $v$  и найти решения уравнения (2) в общем случае можно только численно. Аналитически возможно лишь установить области углов  $\alpha$ , для которых дисперсионное уравнение имеет решения. Для этого необходимо исследовать знаки функции  $F(v, \alpha)$  на границах интервала  $[0, v_L)$  (см. (4)) и производной  $\partial F(v, \alpha)/\partial v$  внутри этого интервала. Необходимым условием существования нечетного числа корней дисперсионного уравнения является несовпадение знаков у функций  $F(0, \alpha)$  и  $\lim_{v \rightarrow v_L} F(v, \alpha)$ :

$$F(0, \alpha) \lim_{v \rightarrow v_L} F(v, \alpha) < 0. \quad (7)$$

Для существования четного числа корней (в частности, двух корней) необходимы наличие локального экстремума функции  $F(v, \alpha)$  в интервале  $[0, v_L)$ .

$$\frac{\partial F(v, \alpha)}{\partial v} = 0 \quad (8)$$

и несовпадение знака функции  $F(v, \alpha)$  в точке экстремума с одинаковыми знаками функции на границах интервала  $[0, v_L)$ .

Таким образом, важно установить соотношения между параметрами  $a, b, a', \mu'$ , при которых функция  $F(v, \alpha)$  (3) имеет тот или иной знак при  $v = 0$  и  $v = v_L$ .

## 2. Анализ решений дисперсионного уравнения

При  $v = 0$  функция  $F(v, \alpha)$  принимает вид,

$$F(0, \alpha) = (1 + \mu') \left( a \sqrt{\frac{b}{d(\alpha)}} + a' \right). \quad (9)$$

Знак функции  $F(0, \alpha)$  может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от сочетания знаков множителей в (9). Знак множителя  $(1 + \mu')$  зависит только от значения  $\mu'$ . Множитель  $(a \sqrt{b/d(\alpha)} + a')$  зависит от угла  $\alpha$  между оптической

Значение угла  $\alpha$ , при котором данный множитель изменяет знак на противоположный, определяется соотношением  $\alpha = \alpha^* = \arcsin \sqrt{a(ab - a'^2)/(b - a)a'^2}$ .

Различные случаи значений материальных параметров и соответствующих им знаков функции  $F(0, \alpha)$  приведены в табл. 1.

Обратимся теперь к исследованию предельных значений функции  $F(v, \alpha)$  при  $v \rightarrow v_L$ .

В зависимости от соотношений между параметрами пограничных сред  $a, b, a', \mu'$  и значения угла  $\alpha$  реализуется один из четырех случаев, представленных в табл. 2.

Найдем предел  $\lim_{v \rightarrow v_L} F(v, \alpha)$  для различных предельных частот  $v_L$ . Для предельной частоты  $v_L = \sqrt{a}$  (случай (ii)) получаем

$$A_1(\alpha) = \lim_{v \rightarrow v_L} F(v, \alpha) = a' \left( \mu' + \sqrt{\frac{1 - a(\mu'/a')}{(1 - a/b)\sin^2 \alpha}} \right). \quad (10)$$

Знак функции  $A_1(\alpha)$  (10) отрицателен для всех  $\alpha \in (0, \pi/2)$ , если выполняется условие

$$b < b^* \equiv a \frac{a'\mu'}{a'\mu' - (a'/\mu' - a)}. \quad (11)$$

Если  $b > b^*$ , то  $A_1(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in [0, \alpha_1)$  и  $A_1(\alpha) < 0$  при  $\alpha \in (\alpha_1, \pi/2]$ , где угол  $\alpha_1$  находится из уравнения  $A_1(\alpha) = 0$ :

Таблица 1. Знаки функции  $F(0, \alpha)$

Случай	Значение $\mu'$	Значение $r = a^2 b/a'^2$	Знак $F(0, \alpha)$
(1)	$-1 < \mu' < 0$	$r < \min(a, b)$	отрицательный
(2)	$-1 < \mu' < 0$	$r > \max(a, b)$	положительный
(3)	$-1 < \mu' < 0$	$\max(a, b) > r > \min(a, b)$	зависит от $\alpha$
(4)	$\mu' < -1$	$r < \min(a, b)$	положительный
(5)	$\mu' < -1$	$r > \max(a, b)$	отрицательный
(6)	$\mu' < -1$	$\max(a, b) > r > \min(a, b)$	зависит от $\alpha$

Таблица 2. Предельные частоты  $v_L$  поверхностных поляритонов на границах одноосных кристаллов и левых изотропных сред

Случай	Соотношения между $a, b$ и $a'/\mu'$	Угол $\alpha$	Предельная частота $v_L$	Знак $\lim_{v \rightarrow v_L} F(v, \alpha)$
(i)	$a'/\mu' < \min(a, b)$	$0 < \alpha < \pi/2$	$\sqrt{a'/\mu'}$	$\text{sgn} A_2(\alpha)$
(ii)	$a < b, a < a'/\mu'$	$0 < \alpha < \pi/2$	$\sqrt{a}$	$\text{sgn} A_1(\alpha)$
(iii)	$b < a, a < a'/\mu'$	$0 < \alpha < \pi/2$	$\sqrt{b}$	$\text{sgn} A_3(\alpha)$
(iv, a)	$a > a'/\mu' > b$	$0 < \alpha < \alpha_0$	$\sqrt{a'/\mu'}$	$\text{sgn} A_2(\alpha)$
(iv, b)	$a > a'/\mu' > b$	$\alpha_0 < \alpha < \pi/2$	$\sqrt{d}$	$\text{sgn} A_3(\alpha)$

Примечание. В случае (iv) для углов  $\alpha \in [0, \alpha_0)$  предельная частота  $v_L = \sqrt{a'/\mu'}$ , а для  $\alpha \in (\alpha_0, \pi/2]$   $v_L = \sqrt{d}$ , где  $\alpha_0 = \arcsin \sqrt{(a - a'/\mu')/(a - b)}$ . Функции  $A_1(\alpha)$ ,  $A_2(\alpha)$  и  $A_3(\alpha)$  заданы формулами (10), (13) и (14) соответственно.

$$\alpha_1 = \arcsin \left( \frac{1}{|\mu'|} \sqrt{\frac{b}{b-a}} \sqrt{\frac{a' - a\mu'}{a'}} \right). \quad (12)$$

Для предельной частоты  $v_L = \sqrt{a'/\mu'}$  (случай (i) и (iv, a))  $\lim_{v \rightarrow v_L} F(v, \alpha)$  бесконечен. Здесь достаточно рассмотреть только знак коэффициента при расходящемся сомножителе  $(a' - \mu'v^2)^{-1/2}$ :

$$A_2(\alpha) = \mu' \left\{ \left( a - \frac{a'}{\mu'} \right) \sqrt{ab} + \left[ ab - \frac{a'}{\mu'} (a + b - d(\alpha)) \right] \sqrt{\frac{a - a'/\mu'}{d(\alpha) - a'/\mu'}} \right\}. \quad (13)$$

Для предельной частоты  $v_L \rightarrow \sqrt{d}$  (случай (iii) и (iv, b)) аналогично выделяем общий коэффициент при расходящемся сомножителе  $(d - v^2)^{-1/2}$ :

$$A_3(\alpha) = \sqrt{\frac{ab^2}{a'\mu'}} \sqrt{[a - d(\alpha)] \left( \frac{a'}{\mu'} - d(\alpha) \right) - \left\{ d(\alpha) \left[ \frac{a'}{\mu'} - a - b \right] + ab \right\}}. \quad (14)$$

Решения уравнений  $A_2(\alpha) = 0$  и  $A_3(\alpha) = 0$  обозначим  $\alpha = \alpha_2$  и  $\alpha = \alpha_3$  соответственно.

Ясно, что в зависимости от значений материальных параметров граничащих сред могут реализоваться  $6 \times 4 = 24$  различных случая (табл. 3), для обозначения которых используем совместную нумерацию из табл. 1 и 2. Так, обозначение (1)–(ii) соответствует комбинации параметров (1) из табл. 1 и комбинации (ii) из табл. 2. Из 24 несовместными являются 6 комбинаций (1)–(iv), (1)–(i), (5)–(ii), (5)–(iii), (3)–(i) и (6)–(iii), в чем легко убедиться, сопоставляя неравенства, определяющие эти комбинации. Результаты анализа оставшихся 18 случаев представлены в табл. 3.

Установлено, что в случаях (1)–(ii), (1)–(iii), (5)–(i) и (1)–(iv) дисперсионное уравнение решений не имеет и возбуждение поверхностных поляритонов

**Таблица 3.** Количество корней дисперсионного уравнения для различных комбинаций материальных параметров

Комбинация случаев	Разрешенные направления распространения	Число корней дисперсионного уравнения
(1)-(iv), (1)-(i)		
(5)-(ii), (5)-(iii)	—	—
(3)-(i), (6)-(iii)		
(1)-(ii), (1)-(iii)	—	0
(5)-(i), (5)-(iv)	—	0
(2)-(i)	$[0, \pi/2]$	1
(2) (iii)	$[0, \pi/2]$	1
(4) (i)	$[0, \pi/2]$	1
(4)-(iii)	$[0, \pi/2]$	1
(2)-(iv)	$[0, \alpha_2]$	1
(3)-(iii)	$(\alpha^*, \pi/2]$	1
(4)-(ii) если $b > a \frac{a'\mu'}{a'\mu' - (a'\mu' - a)}$	$[0, \alpha_1]$	1
(4) (ii) если $b < a \frac{a'\mu'}{a'\mu' - (a'\mu' - a)}$	$[0, \pi/2]$	1
(6)-(i) если $a > b$	$[0, \alpha^*]$	1
(6)-(i) если $b > a$	$[\alpha^*, \pi/2]$	1
(3) (iv)	$[0, \alpha^*]$ и $[0, \alpha_2]$	до 2
(6) (ii)	$[0, \alpha^*]$ и $[0, \alpha_1]$	до 2
(2)-(ii), (6)-(iv)		до 3
(3)-(ii), (4)-(iv)		до 3

невозможно. В 8 случаях дисперсионное уравнение может иметь не более одного решения. Совокупности разрешенных направлений распространения поляригонов здесь определяются условием (7) и образуют секторы в плоскости раздела.

В случаях (3)-(iv) и (6)-(ii) могут существовать сразу два решения дисперсионного уравнения. Здесь условие  $F(0, \alpha)F(v_l, \alpha) < 0$  выполнено, если  $\alpha \in (\alpha^*, \alpha_2)$  (случай (3)-(iv)) или  $\alpha \in (\alpha^*, \alpha_1)$  (случай (6)-(ii)). Для направлений распространения, задаваемых углами  $\alpha \in [0, \alpha^*)$ , дисперсионное уравнение имеет два решения (рис. 1). Здесь мы используем величины  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и  $\alpha^*$ , определенные выше.

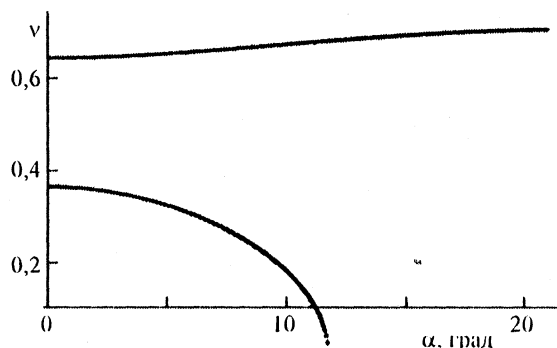
В оставшихся случаях (2)-(ii), (3)-(ii), (4)-(iv), (6)-(iv) число решений дисперсионного уравнения (2) при заданном  $\alpha$  может достигать трех. Рассмотрим эти случаи отдельно.

*Случай (2)-(ii).* Если  $b < b^*$ , то неравенство (7) выполняется при любых  $\alpha$ , т. е. существует одно

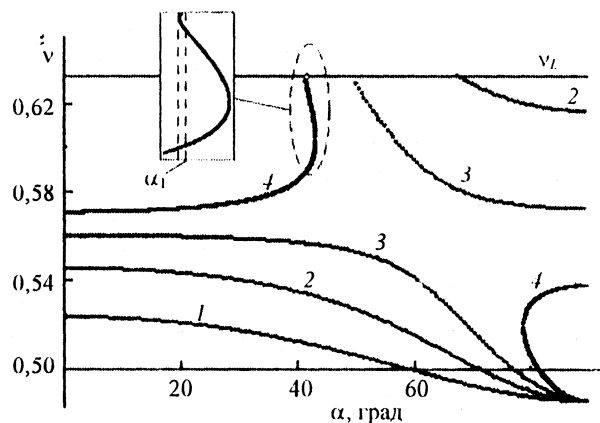
сти от значения параметра  $b$  возможно различное расположение ветвей решений дисперсионного уравнения, в том числе и приводящее к наличию целого интервала углов  $\alpha$ , для которых это уравнение имеет одновременно три решения (вставка на рис. 2).

*Случай (3)-(ii).* При  $b < b^*$  существует только одно решение для углов  $\alpha \in [0, \alpha^*)$ . Если  $b > b^*$ , то появляется еще одна ветвь решения в области  $\alpha \in (\alpha_1, \pi/2]$ . Для некоторых значений параметра  $b$  угол  $\alpha_1$  может стать больше, чем  $\alpha^*$ . При этом ветви решений перестраиваются, появляются интервалы углов  $\alpha$  направлений распространения, для которых существуют одновременно три решения дисперсионного уравнения (рис. 3).

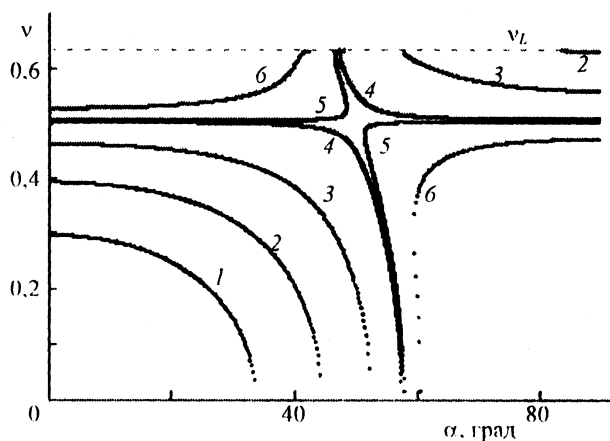
*Случай (4)-(iv).* Имеются две ветви решений в областях  $\alpha \in [0, \alpha_2)$  и  $\alpha \in (\alpha_3, \pi/2]$ . По расположению возможных направлений распространения поверхностных волн этот случай противоположен случаю, ис-



**Рис. 1.** Решения  $v = v(\alpha)$  дисперсионного уравнения (2) (случай (6)-(ii)).  $a = 0,5, b = 0,9, a' = -0,66, \mu' = -1,2$ . Два решения при одинаковом значении  $\alpha$  соответствуют двум изонормальным поверхностным волнам, распространяющимся в заданном направлении с различной фазовой скоростью.



**Рис. 2.** Решения  $v = v(\alpha)$  дисперсионного уравнения (2) (случай (2)-(ii)).  $a = 0,4, a' = -0,34, \mu' = -0,94, b = 0,41$  (1),  $0,42$  (2),  $0,43$  (3),  $0,44$  (4); на вставке



**Рис. 3.** Решения  $v = v(\alpha)$  дисперсионного уравнения (2) (случай (3)-(ii)).  $a = 0,4, a' = -0,41, \mu' = -0,94, b = 0,43$  (1), 0,442 (2), 0,46 (3), 0,48 (4), 0,482 (5), 0,5 (6). График 1 представлен одной кривой в интервале  $[0, \alpha^*]$ , при этом  $b < b^* = 0,441$ ; графики 2, 3, 4 состоят из двух ветвей в интервалах  $[0, \alpha^*]$  и  $(\alpha_1, \pi/2]$ ; графики 5, 6 состоят из двух ветвей преимущественно в интервалах  $[0, \alpha_1]$  и  $(\alpha^*, \pi/2]$ . При увеличении параметра  $b$  от 0,480 до 0,482 происходит преобразование структуры ветвей дисперсионного уравнения.

следованному в работе [4]. В ней рассматривалась граница раздела правого немагнитного одноосного кристалла и правой изотропной среды, а решения дисперсионного уравнения существовали при  $\alpha \in (\alpha_2, \alpha_3)$ . При  $b = b^*$  происходит перестроение ветвей, аналогичное рассмотренному для случая (2)-(ii).

Аналогичная трансформация ветвей решений дисперсионного уравнения при изменении  $b$  наблюдается и в случае (6)-(iv). Здесь дисперсионное уравнение имеет решения при  $\alpha \in [0, \alpha_2]$  и  $\alpha \in (\alpha^*, \pi/2]$ , а преобразования структуры ветвей происходят, когда  $\alpha_2 \approx \alpha^*$ .

### 3. Поверхностные поляритоны на границе раздела слабоанизотропного кристалла и левой среды

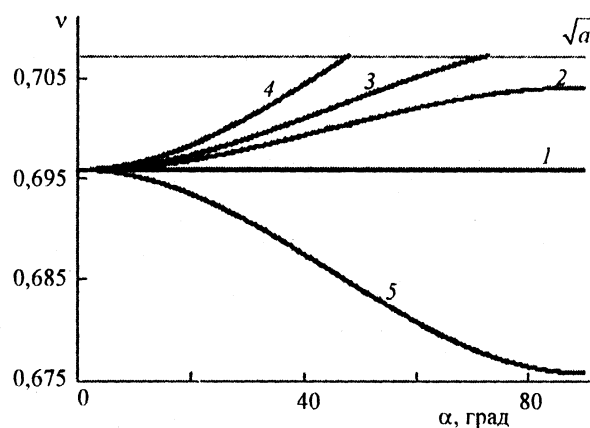
Поверхностные поляритоны на границах раздела левой и правой изотропных сред хорошо изучены [16, 17]. Исследуем влияние слабой анизотропии одной из пограничных сред на характер распространения поверхностных волн при условии, что эта среда граничит с изотропной левой средой. Рассмотрим, как изменяются решения  $v = v_x$  дисперсионного уравнения (2) при переходе от границы раздела изотропных правой и левой сред ( $b = a$ ) к границе правого слабоанизотропного кристалла ( $b \approx a$ ) и левой изотропной среды. При этом полагаем, что переменным является параметр  $b$ , в то время как другие материальные параметры остаются фиксированными.

Далее рассматривается случай, когда  $|\mu'| < 1, |a'| > a, a'/\mu' > a$ .

Выберем  $a = b = 0,5, a' = -0,62, \mu' = -1,22$ . Считаем, что правая изотропная среда при внешнем воздействии (электрическом или механическом) становится оптически одноосной.

Для выбранных параметров равенство  $b = a$  отвечает случаю, промежуточному между (4) (iii) и (4) (ii). При  $b = a$  поверхностные волны могут распространяться в любом направлении вдоль границы раздела (график 1 на рис. 4). При уменьшении  $b$  переходим к комбинации материальных параметров (4)-(iii), при которой поверхностные поляритоны по-прежнему могут распространяться в любом направлении. При увеличении  $b$  параметры соответствуют комбинации (4)-(ii), для которой углы  $\alpha$  для разрешенных направлений распространения поверхностных поляритонов определяются из условия  $F(\sqrt{a}, \alpha) < 0$  (см. табл. 3). Если  $b < b^*$  (11), то

распространение поверхностных волн возможно во всех направлениях, а если  $b > b^*$  — то только для  $\alpha \in [0, \alpha_1)$ . При превышении параметром  $b$  порогового значения  $b^*$  интервал углов  $[0, \alpha_1)$  быстро сужается (см. графики 3, 4 на рис. 4 и 5). Для того чтобы небольшой модуляцией параметра  $b$  можно было значительно изменить угловую ширину секторов разрешенных направлений, необходимо, чтобы  $a$  и  $a'/\mu'$  различались незначительно (см. формулу (12)), что использовалось нами при выборе значений материальных параметров (в рассматриваемом случае  $b^* = 0,505$ ). При дальнейшем увеличении параметра  $b$  и выполнении условия  $b > a^2/a = 0,769$  ( $r > a$ ) материальные параметры будут соответствовать комбинации (6)-(ii), для которой появляется вторая ветвь решения дисперсионного уравнения в области  $[0, \alpha^*)$ .



**Рис. 4.** Зависимости безразмерной приведенной частоты  $v$  от направления распространения поверхностной волны при разных значениях параметра  $b$ .  $b = 0,5$  (1), 0,502 (2), 0,505 (3), 0,510 (4), 0,520 (5).

